ENCICLOPEDIA DELLA SCIENZA E DELLA TECNICA

estratti

coordinate a un altro. Se per esempio $\iint_C f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$ è un integrale riferito a coordinate cartesiane ortogonali, il passaggio al nuovo sistema rappresentato dalle u_1, u_2 della trasformazione (1), si può fare secondo la regola:

$$\iint_C f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \\ = \iint_C f(x_1(u_1, u_2), \quad x_2(u_1, u_2)) \left| \frac{d(x_1, x_2)}{d(u_1, u_2)} \right| du_1\, du_2, \tag{3}$$

ove al secondo membro compare il valore assoluto del determinante funzionale della trasformazione inversa (2). Il noto passaggio dalle coordinate cartesiane alle polari, che comporta la sostituzione dell'elemento d'area $dx\, dy$, con l'altro $\varrho\, d\varrho\, d\vartheta$, rientra in tale regola generale [si consultino le voci INTEGRALE, CALCOLO; AREA; VOLUME. A proposito di queste voci, avvertiamo che, qualora le (1) s'interpretino come equazioni di una corrispondenza fra due piani π, π', nel senso a) sopra accennato, si dimostra il teorema: se Δ è un'areola comunque descritta in R, e Δ' è l'areola corrispondente in π', quando Δ si restringe indefinitamente (tendendo a 0 le sue dimensioni lineari) in modo da concentrarsi in un ben determinato punto P_0 di R, allora il rapporto $\frac{\text{area } \Delta'}{\text{area } \Delta}$ tende al valor limite $\left| \frac{d(u_1, u_2)}{d(x_1, x_2)} \right|_{P_0}$. Questo teorema rende molto intuitiva la suaccennata regola (3)].

Naturalmente quanto esposto vale anche quando, invece di passare dalle coordinate cartesiane x_1, x_2 a un sistema di coordinate curvilinee u_1, u_2, si passi da un tale sistema a un altro qualunque v_1, v_2: questo fatto è una semplice conseguenza di quanto sopra s'è detto a proposito delle trasformazioni composte.

Tutto ciò si trasporta facilmente, e con perfetta analogia, agli spazi cartesiani a 3, 4, . . . dimensioni. Innumerevoli le applicazioni in Analisi, in Geometria (soprattutto differenziale), in fisica matematica. Vastissime e profondissime le ricerche che ne scaturiscono: teoria dei gruppi continui di trasformazioni (trasformazioni che dipendono da parametri), trasformazioni funzionali, ecc.

Per altri significati del termine, si vedano le voci LAPLACE, TRASFORMAZIONE DI; FOURIER, ANALISI DI. Per le trasformazioni funzionali si consulti la voce ANALISI (IN MATEMATICA).

TULLIO VIOLA

LE TRASFORMAZIONI IN GEOMETRIA

Fra le trasformazioni piú importanti dal punto di vista della Geometria ricordiamo qui le trasformazioni del gruppo delle proiettività; ricordiamo inoltre che il gruppo delle trasformazioni proiettive contiene dentro di sé il gruppo delle similitudini e delle congruenze che sono le trasformazioni caratterizzanti la geometria elementare nella visione di Klein.

Tuttavia le trasformazioni proiettive formano un caso particolare di altre trasformazioni formanti pure un gruppo: le cosiddette trasformazioni birazionali (dette anche trasformazioni cremoniane, dal nome del geometra L. Cremona che le studiò per primo) tra spazi proiettivi complessi a n dimensioni ($n \geqslant 2$). Gli invarianti degli enti algebrici rispetto a trasformazioni di questo tipo e anche rispetto a trasformazioni ancora piú generali su cui ritorneremo in seguito sono ritenuti oggetto specifico della geometria algebrica (nella visione classica).

Il concetto di trasformazione cremoniana sarà qui illustrato brevemente in relazione al caso in cui si ha $n = 2$ cioè per le trasformazioni cremoniane tra i piani proiettivi (complessi).

Considerati i due piani π e π', riferiti i piani stessi a due sistemi di coordinate proiettive omogenee x_1, x_2, x_3 e x'_1, x'_2, x'_3 rispettivamente, formule del tipo:

$$\begin{cases} \varrho x'_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \varrho x'_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \varrho x'_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{4}$$

dove f_1, f_2, f_3 sono polinomi omogenei nelle tre variabili

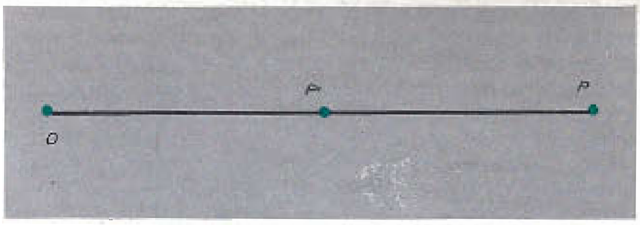

Fig.2 **Schematizzazione della trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti detta inversione circolare. O è il centro di inversione, P' il punto corrispondente al punto P nella trasformazione stessa.**

x_1, x_2, x_3 (che supporremo privi di fattori comuni a tutti e tre) danno una corrispondenza tra il piano π e il piano π'.

Tale corrispondenza è univoca, ma in generale non biunivoca, almeno finché i polinomi f_1, f_2, f_3 sono generici.

La corrispondenza fornita dalle (4) risulta essere biunivoca, cioè dà una trasformazione cremoniana tra i piani, nel caso in cui le formule (4) risultino invertibili *razionalmente* ossia se il sistema formato dalle (4) quando si suppongano dati i valori di x'_1, x'_2, x'_3 si possa ricondurre a essere del primo grado.

Ciò avviene nel caso banale in cui i polinomi f_1, f_2, f_3 siano loro stessi di primo grado e cioè quando la trasformazione sia in particolare un'omografia tra i due piani; tuttavia la circostanza può anche verificarsi in altri casi, e precisamente quando le tre curve algebriche aventi equazioni:

$$f_1 = 0; \qquad f_2 = 0; \qquad f_3 = 0, \tag{5}$$

siano tali da formare una *rete omaloidica*, cioè quando il sistema lineare a due dimensioni (rete) dato da:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \tag{6}$$

dove λ_1, λ_2, λ_3 sono parametri, sia tale che due qualunque curve abbiano una sola intersezione variabile al variare dei parametri. Allora quell'unico punto si assume come corrispondente in π del punto del piano π' le cui coordinate x'_1, x'_2, x'_3 sono state date.

La circostanza si verifica, per esempio, quando le curve (5) siano coniche passanti per tre punti (non allineati) del piano π. In tal caso si ottiene una trasformazione tra due piani che viene detta *trasformazione quadratica*.

Si dimostra che, per il piano, con queste trasformazioni (applicate un numero opportuno di volte) si può generare ogni trasformazione cremoniana.

Ovviamente, escluso il caso dell'omografia, la biunivocità della corrispondenza si verifica soltanto per punti dei due piani che non appartengano a particolari luoghi; vi sono infatti in ogni piano dei punti che sono eccezionali per la corrispondenza; in π essi sono quelli per cui passano tutte le curve della rete (6) (punti fondamentali della rete) e delle curve (curve fondamentali) tali che a ogni punto di esse corrisponde nell'altro piano un unico punto.

Una notissima trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti, che trova applicazione anche in geometria elementare, è la cosiddetta *inversione circolare*. Fissato in un piano un punto O (centro di inversione) e una costante k, si faccia corrispondere a ogni punto P del piano (diverso da O) il punto P' che appartiene alla retta congiungente O con P (FIG. 2) ed è tale che si abbia:

$$OP \cdot OP' = k.$$

Riferito il piano a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali che abbia come origine il punto O, indicate con x e y le coordinate di P e con x' e y' quelle del punto corrispondente P', si ha facilmente che queste ultime si ottengono in funzione delle coordinate di P dalle equazioni:

$$x' = kx/(x^2 + y^2); \qquad y' = ky/(x^2 + y^2). \tag{7}$$

Scambiando tra loro x e x' e anche y e y' si ottengono le formule che danno le coordinate di P in funzione di quelle di P'.

Dall'applicazione delle (7) si conclude facilmente che, se il punto P descrive una circonferenza oppure, come caso particolare, una retta, il punto P' descrive pure una circonferenza, la quale nel caso particolare viene a passare per O; se invece la circonferenza descritta da P passa per O, P' descrive una retta. Se la costante k è positiva, allora esiste una circonferenza, avente centro in O, che è luogo di punti uniti per la trasformazione.

Un altro caso particolarmente notevole di trasformazioni cremoniane tra due piani è dato dalle cosiddette trasformazioni di De Jonquières. Esse mutano rette appartenenti a un determinato fascio di π in rette appartenenti a un fascio corrispondente in π', subordinando tra rette corrispondenti una proiettività che è funzione razionale del parametro fissante la retta nel fascio.

Per esempio, riferiti i due piani a coordinate cartesiane (non necessariamente ortogonali) e supposto che i due fasci corrispondenti siano quelli delle rette parallele agli assi delle ordinate, una trasformazione di De Jonquières può essere data da:

$$x' = x; \qquad y' = \frac{\{a(x)y + b(x)\}}{\{c(x)y + d(x)\}}, \tag{8}$$

dove $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ sono polinomi nella x. I concetti esposti fin qui per corrispondenze tra piani possono essere estesi anche agli spazi a un numero maggiore di dimensioni, con estensioni che sono spesso ovvie ma che talvolta presentano delicate questioni, alcune delle quali non risolte.

Osserviamo infine che le formule (4) possono dare una trasformazione che non è birazionale se considerata tra i punti di due piani, ma diventa birazionale se considerata applicata ai punti appartenenti a due curve algebriche appartenenti ai piani stessi.

Infatti, fissata nel piano π una curva algebrica:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{9}$$

e considerata la sua corrispondente nella trasformazione (4) appartenente al piano:

$$F'(x_1', x_2', x_3') = 0, \tag{10}$$

può avvenire che il sistema formato dalle (4) e dalla (9), quando nelle (4) si introducano certi valori di x_1', x_2', x_3' che soddisfano alla (10), ammetta un'unica soluzione e quindi sia risolubile con operazioni razionali.

Si ottiene allora una *trasformazione birazionale tra le due curve*. Ovviamente ogni trasformazione cremoniana tra due piani π e π' è birazionale tra le curve appartenenti ai piani stessi; ma la proprietà inversa non è vera.

TRASFORMAZIONI CONFORMI

Altri tipi di trasformazione di notevole importanza, fuori dal dominio della geometria algebrica, sono le cosiddette trasformazioni conformi. Siano ora π e π' due piani euclidei riferiti a coordinate cartesiane ortogonali x, y ed x', y' rispettivamente.

Supponiamo siano date due funzioni (ammettenti almeno le derivate prime) $u(x, y)$ e $v(x, y)$ e consideriamo la corrispondenza che si ottiene ponendo:

$$\begin{cases} x' = u(x, y) \\ y' = v(x, y) \end{cases} \tag{11}$$

Ammesso che le (11) diano una trasformazione, cioè una corrispondenza biunivoca, tra un dominio D del piano π e un dominio D' del piano π', si dice che tale trasformazione è *conforme* se, preso un punto qualunque P di D e due curve qualunque Γ e Δ passanti per P, a esse corrispondono due curve Γ' e Δ' per il punto corrispondente P', tali che l'angolo delle tangenti in P è uguale all'angolo delle tangenti in P'.

La condizione perché ciò avvenga è che si abbia, in tutto il dominio D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{12}$$

Tali condizioni sono soddisfatte dalla inversione circolare in ogni dominio D che non contenga l'origine. Pertanto tale trasformazione fornisce un esempio molto elementare (dopo le similitudini) di trasformazione conforme.

Qualora si interpreti il piano π come il piano rappresentativo di una variabile complessa:

$$z = x + iy$$

e il piano π' analogamente come il piano rappresentativo di una variabile complessa:

$$z' = x' + iy',$$

allora le (11) possono essere intese come esprimenti la z' come funzione complessa della variabile complessa z, e le condizioni (12) sono abitualmente indicate come 'condizioni di monogeneità', di Cauchy.

Analoghe considerazioni e definizioni possono svolgersi quando si consideri una corrispondenza tra due superfici. Estensioni del concetto di trasformazione conforme si possono pure dare agli spazi euclidei a un numero di dimensioni maggiore di 2. In tal caso un fondamentale teorema dovuto a Liouville afferma che le sole trasformazioni conformi sono le similitudini e le inversioni (estensioni a questi spazi dell'inversione tra piani sopra trattata).

CARLO FELICE MANARA

Trasformazioni di stato

Si intendono con questo nome le relazioni fra i parametri che governano i passaggi da uno stato fisico a un altro, quali possono essere da solido a liquido, a vapore e viceversa, oppure l'espansione o la compressione di un gas o di un vapore o l'efflusso degli stessi ad alta velocità, ecc., o ancora, per citare un esempio di sistema a piú componenti, la separazione di sale o di ghiaccio per raffreddamento di una soluzione acquosa. A queste si aggiungono i passaggi che comportano trasformazioni energetiche nel corpo in esame (trasformazioni termodinamiche). In ogni caso non intervengono variazioni di natura chimica.

PASSAGGI DI STATO

I tre stati di aggregazione della materia, solido, liquido e gas, sono caratterizzati da diversa densità, come risulta dalla tabella, nella quale sono riportati, a titolo esemplificativo, i valori relativi ad alcune sostanze.

I solidi hanno forma propria, solidi e liquidi hanno volume proprio: quest'ultimo dipende però in maniera sensibile dalla temperatura e meno dalla pressione; per i gas il volume dipende invece essenzialmente da entrambe (si osservi che per i gas, nella tabella, temperatura e pressione sono infatti precisate).

DENSITÀ TIPICHE DEI TRE STATI DI AGGREGAZIONE[1]

Solidi		Liquidi		Gas[2]	
Pt	21 450	Hg	13 546	aria	1,293
Fe	7850	H_2O	1000	CO_2	1,977
Al	2702	benzina media	740	CH_4	0,7168
legni	150-978				

[1] In unità SI: kg/m³. [2] A 0 °C e 760 mm(Hg).

Il passaggio da uno stato piú compatto a uno meno compatto avviene solo per fornitura di energia, spesso comodamente in forma termica, per poter compiere il lavoro di allontanamento delle molecole. I passaggi inversi si ottengono invece per sottrazione di energia o calore; ciò può essere facile se la temperatura ambiente è piú bassa di quella del corpo, altrimenti dev'essere creato intorno al corpo un